Exercice N°11: Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x)=x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \ \ si\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$.

On notera par (ζ_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. Soit $\varphi(x)=2\ln(1+x)-\frac{x}{1+x}$.

a) Etudier le sens de variation de φ sur $[0,+\infty[$. b) En déduire que pour tout x > 0 on a φ(x) > 0.

2. a) Montrer que f est dérivable à droite en 0. b) Montrer que pour tout x>0 : $f'(x)=x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$.

c) Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

3. a)Montrer que pour t ≥ 0, ln(1+t) ≤ t.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite (D) d'équation : y = x.

4. a) Vérifier que $t\in[0,+\infty[$, $on\ a : 1-t\le\frac{1}{1+t}\le 1-t+t^2$.

b) En déduire que : $x\in[0,+\infty[\ on\ a : x-\frac{x^2}{2}\le\ln(1+x)\le x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

c) En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\frac{1}{2}$

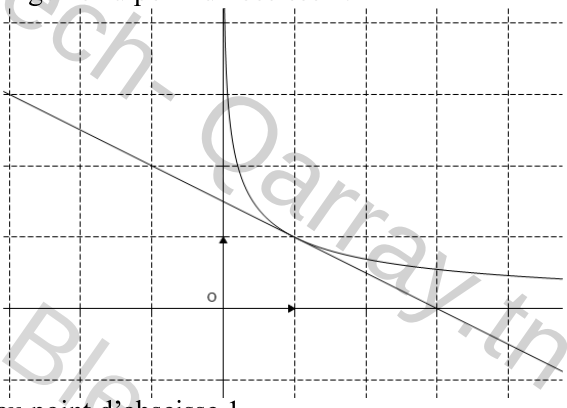
5. a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\left(x-\frac{1}{2}\right)=0.\left(on\ posera\ X=\frac{1}{x}\right)$. Interpréter le résultat géométriquement.

b) Etudier la position de (ζ_f) et la droite Δ : y = x - $\frac{1}{2}$. c) Tracer dans le même repère (ζ_f) et (ζ_f^{-1}).

6. a) Soit $\lambda\in]0,1]$ *et* A_λ : l'aire de la région du plan limité par (ζ_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x = λ et x = 1.Calculer A_λ *et* $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} A_\lambda$.

b) En déduire l'aire de la partie limitée par (ζ_f^{-1}), l'axe des ordonnées et la droite d'équation y = 1.

Exercice N°12 :A- La courbe ci contre est la représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0,+\infty[$. La droite (T) est sa tangente au point d'abscisse 1.



1. Par lecture graphique :

a)Déterminer les valeurs f(1) et f'(1).

b)Dresser le tableau de variation d f.

2. On admet que $\begin{cases} f(x)=\frac{a+\ln x}{b+x} \ \forall x\in]0,+\infty[\setminus\{1\} \\ f(1)=1 \end{cases}$

où a et b sont deux réels. Déterminer l'expression de f.

On prend a =0 et b = -1.

a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $f\left(\mathbb{R}_+^*\right)=J$ à préciser.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente T' à C_f^{-1} au point d'abscisse 1.

c) Tracer (C_f^{-1}).

Qarray.tn - Agra Blech- Qarray.tn

Devoir.tn
Toutes les matières, tous les niveaux...